Corso di laurea in Fisica, a.a. 2020/21, Analisi - 16 giugno 2021
(N. Ansini - G. Galise - C. Pinzari- M. Ponsiglione)

Nome: *Cognome:*

Esercizio 1 Per ogni $n \geq 0$ naturale, siano $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{4^{n+2}}$, $b_n = \dfrac{n \log_5(n+1)}{(n^2+11)^2}$

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{3}{4}$ V F
2. $\displaystyle\sup_{n\geq 0} b_n = +\infty$ V F
3. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente V F
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$ V F

Esercizio 2 Sia $f : [-1,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}\sin(x)$

1. Il grafico di f ha tangente orizzontale nel punto $(0,0)$ V F
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ V F
3. f verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1,0]$ V F
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} < +\infty$ V F

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}\,|\sin(x)|$

1. f è integrabile in $[-1,1]$ V F
2. La funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} f(t)\,dt$ è crescente V F
3. Risulta $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1$ V F
4. f è derivabile nel punto $x_0 = \pi$ V F

Esercizio 4 Si consideri l'equazione differenziale $y''(t) + 2ay'(t) + 4y(t) = 0$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro

1. Se $a = 0$ l'equazione ammette almeno una soluzione illimitata V F
2. Se $a = 1$ esistono soluzioni periodiche V F
3. Se $a = 2$ esistono infinite soluzioni convesse in $\mathbb{R}$ V F
4. Se $a > 2$ la funzione $y(t) = 3e^{-\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)t}$ è soluzione V F

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)^2}$$

1. determinare il dominio di f e studiarne il segno;
2. studiare gli asintoti, continuità e derivabilità;
3. studiare punti di max, min e flessi evidenziando gli eventuali intervalli in cui la funzione f è convessa;
4. disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 6 Svolgere a scelta uno dei seguenti quesiti.

(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$$

(b) Studiare il seguente integrale in senso improprio al variare $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-4x^2} - 1 + 2x^2}{x^\alpha} dx$$